TEORIA DELLA STIMA:
MINIMI QUADRATI

Il metodo dei minimi quadrati non richiede la conoscenza della distribuzione e serve a stimare la media di una v.camp.

E' necessario conoscere:

un campione (non necessariamente Bernoulliano),
la matrice di varianza e covarianza della v.camp. (a meno di un fattore di proporzionalità),
avere alcune informazioni sulla media della v.camp.

$$Y_0=\begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_0 n \end{bmatrix}$$ valori osservati (campione estratto da Y)

$$Y=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$ v.c. n - dimensionale

PARAMETRI NOTI

Non si conosce la distribuzione di Y ma si sa che:

$$E\{Y\}=\mu_Y=y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$ vettore dei valori medi (vettore delle "osservabili")

è distribuito su una varietà lineare V m - dimensionale (varietà dei valori ammissibili)

Conosciamo anche:

$C_{YY}=\sigma_0^2 Q$ (dipendente dal modo in cui si sono effettuate le osservazioni)

con σ_0^2 incognito e Q matrice $(n\times n)$ nota

se le osservazioni sono indipendenti e con ugual precisione: $C_{\underline{Y}\,\underline{Y}}=\sigma_0^2 I_n$

se le osservazioni sono soltanto indipendenti: $C_{\underline{Y}\,\underline{Y}}=\sigma_0^2(\ddots)$

PARAMETRI DA STIMARE
Sono $\hat{y}$ e $\hat{\sigma}_0^2$

Si vuole stimare un $\hat{y}$ tale che:

$$\begin{cases} (Y_0 - \hat{y})^+ Q^{-1} (Y_0 - \hat{y}) = min \\ \hat{y} \in V \end{cases}$$

e un $\hat{\sigma}_0^2$ che sia proporzionale alla forma quadratica da minimizzare

$$\hat{\sigma}_0^2 = cost\ (Y_0 - \hat{y})^+ Q^{-1} (Y_0 - \hat{y}) \quad ;$$

$\hat{\sigma}_0^2$ deve inoltre essere una stima corretta di σ_0^2

MQ CASO LINEARE

$y = A x + a$	modello parametrico
A	matrice disegno
$N = A^+ Q^{-1} A$	matrice normale

Si conoscono n equazioni di osservazioni, funzione di m parametri

n	numerosità del campione
m	numero di parametri da stimare

STIMATORI

parametri: $\hat{x} = (A^+ Q^{-1} A)^{-1} A^+ Q^{-1} (Y_0 - a) = N^{-1} A^+ Q^{-1} (Y_0 - a)$

valori medi: $\hat{y} = A \hat{x} + a$ matrice $(n \times m)$

scarti: $\hat{v} = Y_0 - \hat{y} = Y_0 - A \hat{x} - a$ matrice $(m \times m) = (m \times n)(n \times n)(n \times m)$

STIMA DI σ_0^2

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^+ Q^{-1} \hat{v}}{n - m} = \frac{(Y_0 - \hat{y})^+ Q^{-1} (Y_0 - \hat{y})}{n - m}$$

STIMA DELLE MATRICI DI COVARIANZA

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^+ Q^{-1} A)^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$$

$$C_{\hat{y}\hat{y}} = \hat{\sigma}_0^2 A (A^+ Q^{-1} A)^{-1} A^+ = \hat{\sigma}_0^2 A N^{-1} A^+$$

$$C_{\hat{v}\hat{v}} = \hat{\sigma}_0^2 \left[Q - A \left(A^+ Q^{-1} A \right)^{-1} A^+ \right] = \hat{\sigma}_0^2 \left[Q - A N^{-1} A^+ \right]$$