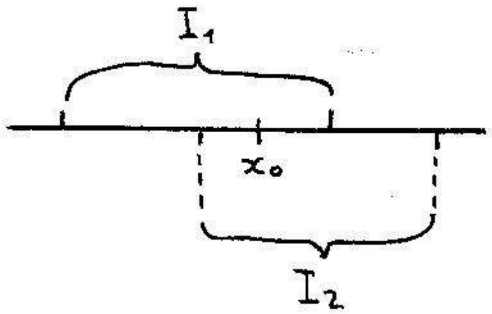
TEOREMA DELL'UNICITA' DEL LIMITE

se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora tale limite è unico.

DIMOSTRAZIONE: (per assurdo, negando la tesi)
supponiamo che

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = m$ con $l \neq m$
1) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists I_1(x_0): \quad \forall x \in I_{1,} x \neq x_0 \quad l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$
2) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists I_2(x_0): \quad \forall x \in I_{2,} x \neq x_0 \quad m - \epsilon < f(x) < m + \epsilon$



$I = I_1 \cap I_2$

ϵ è arbitrario, scelgo $\epsilon = \frac{|l-m|}{2}$

$|l-m| = |f(x) + l - m - f(x)| < |f(x) - m| + |f(x) - l| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = 2\frac{|l-m|}{2}$

$\Rightarrow |l-m| < |l-m|$ assurdo, quindi non puó essere che il limite tenda a due valori diversi