AUTOMATICA

DEFINIZIONE DI SISTEMA LINEARE

u	->	ingresso	variabile esterna
x	->	stato	variabile interna
y	->	uscita	variabile esterna

tempo: discreto / continuo

Se consideriamo i casi con un solo ingresso e una sola uscita:

$$u(t) \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad y(t) \in \mathbb{R}$$

n -> ordine del sistema

SISTEMI LINEARI A TEMPO DISCRETO

equazione di stato: $x(t+1) = A\,x(t) + b\,u(t)$
trasformazione d'uscita: $y(t) = c^T x(t) + d\,u(t)$

A	->	$n \times n$
b	->	$n \times 1$
c^T	->	$1 \times n$
d	->	è un reale

Se A, b, c^T, d sono costanti nel tempo si ha un sistema invariante.

SISTEMI LINEARI A TEMPO CONTINUO

equazione di stato: $\dot{x} = A\,x(t) + b\,u(t)$
trasformazione d'uscita: $y(t) = c^T x(t) + d\,u(t)$

Spesso $d = 0$, cioè l'ingresso non influenza direttamente l'uscita.

se $d = 0$	sistema proprio	non c'è relazione istantanea tra u e y
se $d \neq 0$	sistema improprio	c'è relazione istantanea tra u e y
se $b = 0$	sistema autonomo	non ha ingresso o ingresso è identicamente nullo

MODELLO ARMA E FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Definizione interna del sistema -> Fa riferimento a u, x, y

Definizione esterna del sistema -> Fa riferimento solo a u e y (no stato)

In un sistema lineare di ordine n la somma pesata degli ultimi $n+1$ valori di ingresso uguaglia, in ogni istante t, la somma pesata dei corrispondenti valori in uscita:

$$y(t+n)+\alpha_1 y(t+n-1)+\ldots+\alpha_n y(t)=\beta_0 u(t+n)+\beta_1 u(t+n-1)+\ldots+\beta_n u(t)$$

Se $\beta_0 \neq 0$ $y(t)$ è funzione di $u(t)$ -> sistema proprio

Se $\beta_0 = 0$ $y(t)$ non è funzione di $u(t)$ -> sistema improprio

Il sistema può anche essere espresso nella forma:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}(-\alpha_i)\,y(t-i)+\sum_{i=0}^{n}\beta_i u(t-i)$$

$\sum_{i=1}^{n}(-\alpha_i)\,y(t-i)$ -> autoregressione (AR) autoregressive

$\sum_{i=0}^{n}\beta_i u(t-i)$ -> media mobile (MA) moving average

A tempo continuo:

$$y^{(n)}(t)+\alpha_1 y^{(n-1)}(t)+\ldots+\alpha_n y^{(0)}(t)=\beta_0 u^{(n)}+\beta_1 u^{(n-1)}(t)+\ldots+\beta_n u^{(0)}(t)$$

con $u^{(i)}(t)$ e $y^{(i)}(t)$ derivate i-esime di ingresso e uscita.

Forma generale:

$$D(p)\,y(t)=N(p)\,u(t)$$

con $D(\bullet)$ e $N(\bullet)$ polinomi di grado n, in particolare:

$$D(p)=p^n+\alpha_1 p^{n-1}+\ldots+\alpha_n$$
$$N(p)=\beta_0 p^n+\beta_1 p^{n-1}+\ldots+\beta_n$$

p -> operatore di anticipo $py(t)=y(t+1)$ t. d. z

p -> operatore di derivazione $py(t)=\dot{y}(t)$ t. c. s

Se $D(\bullet)$ e $N(\bullet)$ sono primi tra loro -> modello ARMA di trasferimento.

Funzione di trasferimento (f.d.t.): $G(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}=\rho\,\dfrac{(p-z_1)(p-z_2)\ldots(p-z_n)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}$

z_i ->radici di N

p_i ->radici di D

ρ ->costante di trasferimento

Se modello ARMA non è di trasferimento, cioè:

$$N(p)=r(p)n(p)$$
$$D(p)=r(p)d(p)$$

con $n(\bullet)$ e $d(\bullet)$ coprimi,

f.d.t. : $G(p)=\dfrac{n(p)}{d(p)}$

radici di n -> zeri
radici di d -> poli
della f.d.t.

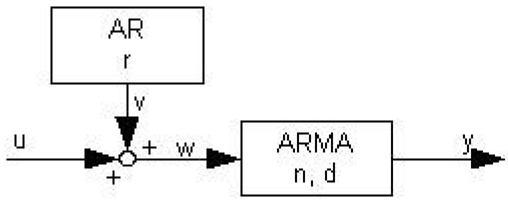
Il modello ARMA non di trasferimento viene scomposto in un modello ARMA di trasferimento individuato dai polinomi coprimi $n(\bullet)$, $d(\bullet)$:

$$d(p)y(t)=n(p)w(t)$$

e in un modello AR individuato dai polinomi 0, $r(\bullet)$:

$$r(p)v(t)=0$$

con $w(t)=v(t)+u(t)$



Infatti:

$$\boldsymbol{r(p)}d(p)y(t)=n(p)w(t)\boldsymbol{r(p)}$$
$$\boldsymbol{r(p)d(p)}y(t)=\boldsymbol{r(p)n(p)}u(t)+n(p)\boldsymbol{r(p)v(t)}$$
$$\boldsymbol{D(p)}y(t)=\boldsymbol{N(p)}u(t)+\boldsymbol{0}$$

Si definisce quindi il grado relativo come la differenza tra il grado dei polinomi D e N (grado relativo r = grado di D – grado di N), quindi β_r è il primo $\beta\neq 0$

Ordine (A,b,c^T,d)	$\geq$	Ordine ARMA	$\geq$	Ordine f.d.t.
Se ci sono parti non osservabili, ordine (A,b,c^T,d)	$>$	Ordine ARMA		
Se non ci sono parti non osservabili, ordine (A,b,c^T,d)	$=$	Ordine ARMA		
Se ci sono parti non raggiungibili, ordine ARMA			$>$	Ordine f.d.t.
Se ci sono parti non raggiungibili, ordine ARMA			$=$	Ordine f.d.t.

DISEGNO RAGG & OSS?