AUTOMATICA

SISTEMA “FISICO”

m -> variabili d'ingresso $u_1(t), \ldots, u_m(t)$

p -> variabili d'uscita $y_1(t), \ldots, y_p(t)$

$$u(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} u(t)\in\mathbb{R}^m \\ \\ y(t)\in\mathbb{R}^p \end{matrix}$$

tempo continuo (t. c.), $t\in\mathbb{R}$
tempo discreto (t. d.), $t\in\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ numeri interi relativi $\mathbb{N}\cup 0\cup -\mathbb{N}$)

variabili <u>esterne</u>:
$u(t)$ ingresso
$y(t)$ uscita

MODELLO

Descrizione matematica della relazione I-O.
Descrizione parziale e mai esatta della realtà, considera solo gli aspetti rilevanti agli scopi del modello.
Dice come l'uscita $y(t)$ del sistema fisico “dovrebbe” rispondere ad un dato $u(t)$.

MODELLO (SISTEMA) ALGEBRICO (NON DINAMICO)

Definisce un legame istantaneo tra $u(t)$ ed eventualmente t, con l'uscita $y(t)$.

$$y(t)=g(u(t),t)\ ; \quad g(u,t)=\begin{bmatrix} g_1(u,t) \\ \vdots \\ g_p(u,t) \end{bmatrix}$$

MODELLO (SISTEMA) DINAMICO

Modello dinamico -> l'uscita dipende dalle variabili di stato
variabili di stato -> variabili interne $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ i cui valori descrivono completamente lo stato del sistema
L'uscita può essere funzione anche dell'ingresso $u(t)$ e del tempo t

$$y(t)=g(x(t),u(t),t)\ , \quad g(x,u,t)=\begin{bmatrix} g_1(x,u,t) \\ \vdots \\ g_p(x,u,t) \end{bmatrix}, \quad x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad x(t)\in\mathbb{R}^n\ \forall t$$

n -> intero ≥ 1 è detto ordine (dimensione) del sistema

EQUAZIONE DI STATO

Noti $x(t_0)$ e l'andamento dell'ingresso nell'intervallo $[t_0, t]$, $t > t_0$ $\left(u_{[t_0, t]}(\cdot)\right)$ si deve poter determinare l'evoluzione dello stato $x_{[t_0, t]}(\cdot)$

t. c. $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ equazioni differenziali
t. d. $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$ equazioni alle differenze

$$f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ \vdots \\ f_n(x, u, t) \end{bmatrix}$$

RIASSUMENDO

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ t. c.
$x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$ t. d. equazione di stato
$y(t) = g(x(t), u(t), t)$ trasformazione d'uscita

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI DINAMICI

SISTEMI A DIMENSIONE INFINITA

Ad ogni istante di tempo t, $x(t)$ è una funzione.
Lo stato $x(t)$ è un elemento di uno spazio funzionale e la sua evoluzione è descritta da equazioni differenziali (alle differenze a t. d.) alle derivate parziali.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad n = \infty$$

SISTEMI A DIMENSIONE FINITA (n finito)

Ad ogni istante di tempo t, lo spazio di stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$.
La sua evoluzione è descritta da equazioni differenziali (t. c.) / alle differenze (t. d.) ordinarie.
Geometricamente, lo stato è descritto da un punto che parte da uno stato iniziale $x(t_0)$ e percorre una traiettoria nello spazio di stato.

SISTEMI PROPRI	SISTEMI IMPROPRI
$g(x, u, t)$ non dipende da u. Non c'è un legame istantaneo (algebrico) I/O.	$g(x, u, t)$ dipende da u. C'è un legame istantaneo I/O.

<table>
<tr><th colspan="2">SISTEMI TEMPO INVARIANTI</th><th colspan="2">SISTEMI TEMPO VARIANTI</th></tr>
<tr><td>$f(x, u, t)$</td><td rowspan="2">non dipendono da t</td><td>$f(x, u, t)$</td><td rowspan="2">dipendono da t</td></tr>
<tr><td>$g(x, u, t)$</td><td>$g(x, u, t)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nei sistemi tempo invarianti, t_0 si può scegliere algebricamente, spesso si assume $t_0 = 0$.</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

SISTEMI AUTONOMI

$f(x,u,t)$
$g(x,u,t)$ non dipendono da u ($u(t)=\bar{u}$ costante $\forall t$)

SISTEMI LINEARI

$f(x,u,t)$
$g(x,u,t)$ sono combinazioni lineari di x e u

$$f(x,u,t)=A(t)x+B(t)u$$
$$g(x,u,t)=C(t)x+D(t)u$$

$$\left.\begin{array}{ll} A(t)=[a_{ij}(t)] & n\times n \\ B(t)=[b_{ij}(t)] & n\times m \\ C(t)=[c_{ij}(t)] & p\times n \\ D(t)=[d_{ij}(t)] & p\times m \end{array}\right\} \text{funzioni del tempo}$$

m -> ingressi
n -> variabili di stato
p -> uscite