CAMPI VETTORIALI

Un campo $F(x,y)$ nel piano è conservativo se $F(x,y)=\nabla\Phi(x,y)$.
$\Phi=$ potenziale di F

$F(x,y)=F_1(x,y)\vec{i}+F_2(x,y)\vec{j}$

Se F è conservativo dobbiamo avere che:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Sia $F(x,y,z)$ un campo nello spazio

$F(x,y,z)=F_1(x,y,z)\vec{i}+F_2(x,y,z)\vec{j}+F_3(x,y,z)\vec{k}$

Se $F(x,y,z)=\nabla\Phi(x,y,z)$

$$F_1(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,z)\quad ;\quad F_2(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,z)\quad ;\quad F_3(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,z)$$

Il campo è conservativo se:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}\quad ;\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x}\quad ;\quad \frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}=\vec{0}$$

$$(*)\qquad det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{pmatrix}=\vec{0}$$

Se $v_1=(x_{1,}y_{1,}z_1)$ e $v_2=(x_{2,}y_{2,}z_2)$

$v_1\times v_2=det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{pmatrix}$ è il prodotto vettore di v_1 e v_2

$(*)\qquad \nabla\times F=\vec{0}\qquad\qquad \nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$

$\nabla\times F=$ rotore di F , si indica anche con $rotF$

<u>*Condizione necessaria affinché* F *sia conservativo è che il rotore sia nullo.*</u>

ESEMPIO:

$F(x,y)=(2x+2xy^2)\vec{i}+(2y+2yx^2)\vec{j}$ è un campo conservativo?

$\frac{\partial}{\partial x}(2y+2yx^2)=4xy$ e $\frac{\partial}{\partial y}(2x+2xy^2)=4xy$

La condizione necessaria è verificata, il campo potrebbe essere conservativo.

Calcolo un potenziale: $\int (2x+2xy^2)\,dx=x^2+x^2y^2+C(y)$

Se $\Phi(x,y)$ è un potenziale, allora

$\Phi(x,y)=x^2+x^2y^2+C(y)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\cancel{2x^2y}+C'(y)=2y+\cancel{2yx^2}$$

$$C'(y)=2y \quad \Rightarrow \quad C(y)=y^2+C$$

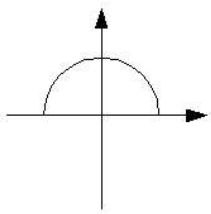
$\Phi(x,y)=x^2+x^2y^2+y^2+C$ è un potenziale del campo.

Il campo è conservativo.

INTEGRALI DI LINEA DI UN CAMPO

DEFINIZIONE

Un arco liscio (o curva liscia) è una curva $\vec{r}:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, differenziabile (ha tutte le componenti derivabili) e regolare in $[a,b]$ (il vettore tangente è diverso da 0 in ogni punto) tale che il vettore tangente $\vec{r}\,'t$ è continuo in $[a,b]$.



$\vec{r}:[0,\pi]\rightarrow \mathbb{R}^2$

$\vec{r}(t)=(\cos(t),\sin(t))$

$\vec{r}\,'(t)=(-\sin(t),\cos(t))$ è una funzione continua di t ,
non è mai uguale a 0 ,
quindi è un arco liscio

DEFINIZIONE

Se $F:D\rightarrow \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale nel piano o nello spazio e $\vec{r}:[a,b]\rightarrow D$ è un arco liscio, si definisce l'integrale di linea di F lungo l'arco r la quantità $\int_a^b F(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$

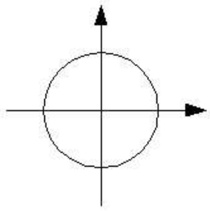
L'integrale di linea si indica con $\int_{\vec{r}} F\cdot d\vec{r}$

$$F(x,y)=F_1(x,y)\,dx+F_2(x,y)\,dy$$
$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$$
$$\int_{\vec{r}} F\cdot d\vec{r}=\int_a^b F_1(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt+\int_a^b F_2(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

Se F è un campo di forze, l'integrale di linea è il lavoro del campo lungo l'arco $\vec{r}$.

ESEMPIO:

$$F(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$



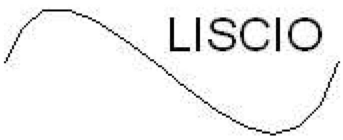
$F(x,y)$ è definito su $D=\{(x,y)|(x,y)\neq(0,0)\}$

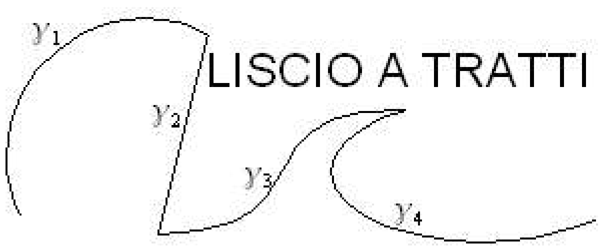
$\vec{r}:[0,1]\rightarrow D$

$r(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))$

$$\int_{\vec{r}} f\cdot d\vec{r}=$$
$$=\int_0^1 \frac{-\sin(2\pi t)}{\cos^2(2\pi t)+\sin^2(2\pi t)}\cdot -\sin(2\pi t)2\pi\,dt+\int_0^1 \frac{\cos(2\pi t)}{\cos^2(2\pi t)+\sin^2(2\pi t)}\cdot\cos(2\pi t)2\pi\,dt=$$
$$=\int_0^1 \sin^2(2\pi t)2\pi\,dt+\int_0^1 \cos^2(2\pi t)2\pi\,dt=\int_0^1\left[\sin^2(2\pi t)+\cos^2(2\pi t)\right]2\pi\,dt=\int_0^1 2\pi\,dt=2\pi$$

Si può definire l'integrale di linea di un campo su archi lisci a tratti che sono archi continui che non sono differenziabili solo in un numero finito di punti.

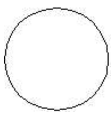




Gli archi lisci a tratti sono archi che in un numero finito di punti hanno degli angoli.
L'integrale di linea di un campo su un arco liscio a tratti si definisce come la somma degli integrali di linea sui tratti lisci.

$$\int_{\vec{r}} F\cdot d\vec{r}=\int_{\gamma_1} F\cdot d\vec{\gamma}_1+\int_{\gamma_2} F\cdot d\vec{\gamma}_2+\int_{\gamma_3} F\cdot d\vec{\gamma}_3+\int_{\gamma_4} F\cdot d\vec{\gamma}_4$$

L'integrale di linea dipende dalla parametrizzazione dell'arco solo a meno di un segno.



$\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t) \quad t\in[0,2\pi]$
$\vec{r}_1(t)=(\cos 2t,\sin 2t) \quad t\in[0,\pi]$

Se $f:D\rightarrow\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ è un campo e $\vec{r}(t)$ è un arco liscio in D , $t\in[a,b]$

$t=t(s) \quad s\in[a',b']$
$\vec{r}_1(s)=\vec{r}(t(s))$

Se la funzione $t(s)$ è crescente, questo vuol dire che si percorre l'arco nello stesso verso.
Se $t(s)$ è decrescente, vuol dire che si percorre l'arco in senso inverso.

Se $t(s)$ è crescente: $\int_{\vec{r}_1} F\cdot d\vec{r}_1=\int_{\vec{r}} F\cdot d\vec{r}$

Se $t(s)$ è decrescente: $\int_{\vec{r}_1} F\cdot d\vec{r}_1=-\int_{\vec{r}} F\cdot d\vec{r}$

INTEGRALI DI LINEA DI CAMPI CONSERVATIVI

Sia $\vec{r}$ un arco liscio e $F(x,y)$ un campo conservativo nel piano

$\vec{r}(t)=(x(t),y(t)) \quad t\in[a,b]$

$F(x,y)=F_1(x,y)\vec{i}+F_2(x,y)\vec{j}$

$$\int_{\vec{r}} F\cdot d\vec{r}=\int_a^b [F_1(x(t),y(t))x'(t)+F_2(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

$F(x,y)=\nabla\Phi(x,y)$

quindi $F_1(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\Phi$ e $F_2(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\Phi$

$$\int_{\vec{r}} F\cdot d\vec{r}=\int_a^b\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)\right]dt=$$
$$=\int_a^b\frac{d\Phi}{dt}(x(t),y(t))dt=\Phi(x(b),y(b))-\Phi(x(a),y(a))$$

Se $F=\nabla\Phi$ e $\vec{r}$ è una curva che congiunge $P_0=(x_0,y_0)$ a $P_1=(x_1,y_1)$

$$\int_{\vec{r}} F\cdot d\vec{r}=\Phi(x_1,y_1)-\Phi(x_0,y_0)$$

In particolare l'integrale di linea di un campo conservativo non dipende dall'arco ma solo dagli estremi dell'arco.

In particolare se l'arco è chiuso (cioè il punto iniziale coincide con quello finale) $\Rightarrow \int_{\vec{r}} F\cdot d\vec{r}=0$
Se il campo è conservativo.

Per indicare gli integrali di linea su curve chiuse si usa il simbolo di **circuitazione** $\oint_{\vec{r}} f\cdot dr$

TEOREMA

Sia $F:D\to\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ un campo.

Sono equivalenti:

1) F è conservativo

2) Se $r:[a,b]$ è un arco liscio a tratti allora $\int_{\vec{r}} F\cdot d\vec{r}$ dipende solo da $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(b)$.

3) $\oint_r F\cdot d\vec{r}=0$ per ogni curva chiusa $\vec{r}$

ESEMPIO:

$F: D \to \mathbb{R}^2$ con $D = \{(x, y) | (x, y) \neq (0,0)\}$

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2} \right) \quad \text{è conservativo?}$$

$$\int_{\vec{r}} F \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

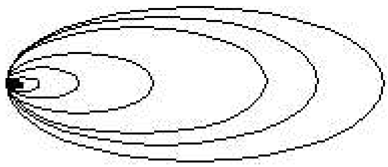
se $\vec{r}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

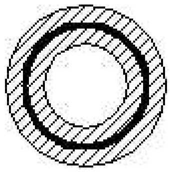
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-1(x^2+y^2) - 2y(-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\oint_{\vec{r}} F \, d\vec{r} = 2\pi \quad \text{dove} \quad \vec{r}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \quad t \in [0,1]$$

DOMINI SEMPLICEMENTE CONNESSI

Un dominio D si dice semplicemente connesso se ogni arco chiuso in D può essere deformato con continuità in D a un punto.





La **corona circolare** non è semplicemente connessa

Se D è semplicemente connesso e $F(x, y) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j}$ è un campo definito su D allora F è conservativo se e solo se: $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$.

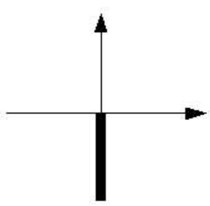
Un dominio si dice stellato se esiste un punto $(x_0, y_0) \in D$ tale che per ogni $(x, y) \in D$ il segmento che congiunge (x_0, y_0) a (x, y) è tutto contenuto in D .

TEOREMA

I domini stellati sono tutti semplicemente connessi.
Quindi un campo definito su un dominio stellato che soddisfa la condizione necessaria $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ è conservativo.

ESERCIZIO

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | y \leq 0; x = 0\}$ D è stellato



$F: D \to \mathbb{R}^2$ $\quad F(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}; \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$

Calcolare un potenziale