INTEGRALI TRIPLI

Sia $F: D \to \mathbb{R}$ una funzione di tre variabili cioè $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

Se $F(x, y, z) \geq 0$ per ogni $(x, y, z) \in D$ consideriamo:

$$\{(x, y, z, w) \subseteq \mathbb{R}^4 | (x, y, z) \in D ; 0 \leq w \leq f(x, y, z)\}$$

La generalizzazione della definizione rigorosa di volume di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ a un sottoinsieme Ω in $\mathbb{R}^4$ è detta misura di Ω .

Si definisce come integrale della funzione $F: D \to \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^3$ con $F(x, y, z) \geq 0$

$$\int\int\int_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = misura \quad di \quad \Omega = \{(x, y, z, w) | (x, y, z) \in D ; 0 \leq w \leq f(x, y, z)\}$$

Se F non è positiva si definisce

$$F^+(x, y, z) = \begin{cases} F(x, y, z) & se \quad F(x, y, z) \geq 0 \\ 0 & se \quad F(x, y, z) \leq 0 \end{cases}$$

$$F^-(x, y, z) = \begin{cases} -F(x, y, z) & se \quad F(x, y, z) \leq 0 \\ 0 & se \quad F(x, y, z) \geq 0 \end{cases}$$

e $\int\int\int_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\int\int_D F^+(x, y, z)\, dx\, dy\, dz - \int\int\int_D F^-(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

Valgono le stesse proprietà dell'integrale doppio:

1) $\int\int\int_D (F(x, y, z) + G(x, y, z))\, dx\, dy\, dz = \int\int\int_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \int\int\int_D G(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

2) $\int\int\int_D \lambda F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lambda \int\int\int_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \quad \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\int\int\int_D 0\, dx\, dy\, dz = 0$

4) Se D ha volume nullo: $\int\int\int_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 0$

5) $\int\int\int_D dx\, dy\, dz = VOLUME \quad (D)$

CALCOLO DEGLI INTEGRALI TRIPLI

DEFINIZIONE:
Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^3$ si dice z-semplice se:

$$D=\{(x,y,z)|(x,y)\in D'\wedge g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\}$$

dove D' è un dominio regolare e $g_1: D'\to\mathbb{R}, g_2: D'\to\mathbb{R}$ sono funzioni continue con $g_1(x,y)\le g_2(x,y)$.

INTEGRAZIONE PER FILI
Se D è un dominio z-semplice e $f: D\to\mathbb{R}$ è integrabile allora

$$\int\int\int_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\int_{D'}\left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

INTEGRAZIONE PER STRATI
Se D è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ e $z\in\mathbb{R}$ indichiamo con D_z lo strato di D ad altezza z :

$$D_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x,y,z)\in D\}$$

Sia D un dominio in $\mathbb{R}^3$ con queste proprietà:
1) Ogni strato D_z è un dominio regolare
2) Esistono $a,b\in\mathbb{R}; a<b$ tali che $D_z\ne\emptyset$ solo se $a\le z\le b$

Se $F: D\to\mathbb{R}$ è integrabile allora: $\int\int\int_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_a^b\left(\int\int_{D_z} F(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz$

ESEMPIO:
Calcolare $\int\int\int_D (x+y-3z)\,dx\,dy\,dz$ dove $D=\{(x,y,z)|x\ge 0; y\ge 0; z\ge 0; x+y+z\le 1\}$

$$D=\{(x,y,z)|0\le x\le 1; 0\le y\le 1-x; 0\le z\le 1-x-y\}$$

$$D'=\{(x,y)|0\le x\le 1; 0\le y\le 1-x\}\quad\Rightarrow\quad D' \text{ è y-semplice}$$

$$\int\int\int_D (x+y-3z)\,dx\,dy\,dz=\int\int_{D'}\left(\int_0^{1-x-y}(x+y-3z)\,dz\right)dx\,dy=\int\int_{D'}(\left[xz+yz-\frac{3}{2}z^2\right]_0^{1-x-y})\,dx\,dy=$$
$$=\int\int_{D'}(x(1-x-y)+y(1-x-y)-\frac{3}{2}(1-x-y)^2)\,dx\,dy=\int\int_{D'}(4(x+y)-\frac{5}{2}(x+y)^2-\frac{3}{2})\,dx\,dy=$$
$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(4(x+y)-\frac{5}{2}(x+y)^2-\frac{3}{2})\,dy\right)dx=\int_0^1 2(x+y)^2\Big|_0^{1-x}-\frac{5}{6}(x+y)^3\Big|_0^{1-x}-\frac{3}{2}y\Big|_0^{1-x}\,dx=$$
$$=\int_0^1(2-2x^2-\frac{5}{6}+\frac{5}{6}x^3-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}x)\,dx=\left[2x-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x+\frac{5}{24}x^4-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}x^2\right]_0^1=$$
$$=2-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}+\frac{5}{24}-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{24}$$

CAMPI VETTORIALI e INTEGRALI DI LINEA

CAMPI VETTORIALI:

Un campo vettoriale nel piano è una funzione $F: D \to \mathbb{R}^2$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$
Un campo vettoriale nello spazio è una funzione $F: D \to \mathbb{R}^3$ con $D \subseteq \mathbb{R}^3$

ESEMPIO

$D = \{(x, y) | x \neq 0 \vee y \neq 0\}$

$F: D \to \mathbb{R}^2$ $\quad F(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ è un campo vettoriale nel piano

ESEMPIO:

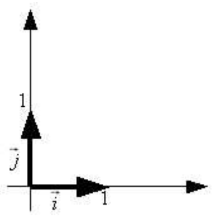
$D = \{(x, y, z) | (x, y, z) \neq (0,0,0)\}$

$F: D \to \mathbb{R}^3$ $\quad F(x, y, z) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|^{\frac{3}{2}}} (x, y, z)$ è un campo vettoriale nello spazio

ALTRE NOTAZIONI

Sia $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ un campo vettoriale nel piano

$\vec{i}, \vec{j}$
$\vec{i} = (1,0)$
$\vec{j} = (0,1)$



$$(F_1(x, y), F_2(x, y)) = F_1(x, y)(1,0) + F_2(x, y)(0,1) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j}$$

Un campo $F(x, y, z)$ nello spazio si può scrivere come:

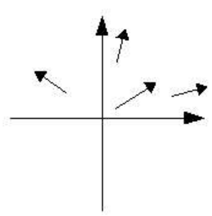
$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}$$

Oppure, in **forma vettoriale**:

$$\vec{i} = (1,0,0) \quad \vec{j} = (0,1,0) \quad \vec{k} = (0,0,1)$$
$$dx = (1,0,0) \quad dy = (0,1,0) \quad dk = (0,0,1)$$
$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$$

Geometricamente un campo vettoriale associa a ogni punto un vettore.

$$F(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j}$$



Nel punto (x, y) si disegna $F(x, y)$

Un campo viene detto **liscio** se le derivate parziali di qualsiasi ordine delle sue componenti sono continue nel dominio del campo.

ESEMPIO:

$F(x,y)=(x+y-1)\vec{i}+e^y\vec{j}$ è un campo liscio

$(x+y-1)$ è continua

$\frac{\partial}{\partial x}(x+y-1)=1 \qquad \frac{\partial}{\partial y}(x+y-1)=1$

Le derivate di ordine maggiore o uguale a due sono nulle.
Tutte le derivate della prima componente del campo sono continue.

$\frac{\partial}{\partial x}e^y=0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}e^y=e^y$

Le derivate di ordine maggiore o uguale a due sono nulle oppure sono e^y quindi tutte le derivate sono continue.

Quindi il campo è liscio.
D'ora in poi considereremo solo campi lisci.

CAMPI CONSERVATIVI

DEFINIZIONE:
Diremo che un campo vettoriale F è conservativo se esiste una funzione Φ tale che $F=\nabla\Phi$.
Φ è detta potenziale del campo.

Il potenziale di un campo non è unico, se Φ è un potenziale di F allora $\Phi+C$ con C costante è un altro potenziale.

ESEMPIO:
$D=\{(x,y,z)|(x,y,z)\neq(0,0,0)\}$

$F:D\rightarrow\mathbb{R}^3$

$F(x,y,z)=\frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z)$ è un campo conservativo

Un potenziale è: $\Phi(x,y,z)=-\frac{1}{\|(x,y,z)\|}$

$$\nabla\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot\cancel{2}x=$$
$$=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot x=\frac{x}{\|(x,y,z)\|^3}$$

lo stesso conto vale per $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$.

ESERCIZIO:

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(x, y) = (2x, e^{xy})$ è conservativo?

Se $F(x, y)$ è conservativo, allora $F(x, y) = \nabla \Phi(x, y)$

$$F(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Phi, \frac{\partial}{\partial y} \Phi \right)$$

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

$$F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi \qquad F_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \Phi$$

quindi:

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \Phi$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi$$

per il teorema di Schwarz

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \Phi = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi$$

cioè $\boxed{\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y)}$

Questa è la condizione necessaria affinché il campo sia conservativo

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(x, y) = (2x, e^{xy})$

F è conservativo?

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) = y e^{xy} \neq 0$$

quindi il campo non è conservativo.