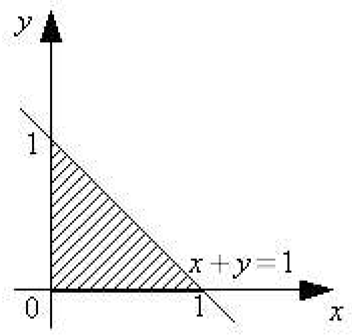
ESEMPIO:

$D=\{(x,y)|x\geq 0\,;\,y\geq 0\,;\,x+y\leq 1\}$

N.B. Se D è y-semplice $\Rightarrow$ $\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$



D è y-semplice

$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1\,;\,0\leq y\leq 1-x\}$

Sia $F(x,y)=2-x+y$

Calcolare $\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy$

$$\int\int_D (2-x+y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(2-x+y)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(2y\Big|_0^{1-x}-xy\Big|_0^{1-x}+\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{1-x}\right)dx=$$

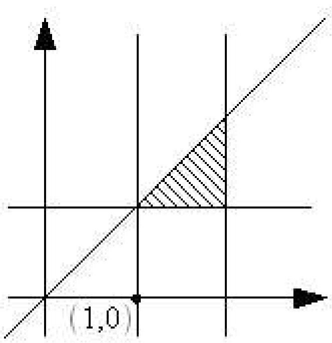
$$=\int_0^1\left(2(1-x)-x(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2\right)dx=\int_0^1 2-2x-x+x^2+\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2\,dx=\int_0^1\left(\frac{5}{2}-4x+\frac{3}{2}x^2\right)dx=$$

$$=\frac{5}{2}x\Big|_0^1-2x^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}x^3\Big|_0^1=\frac{5}{2}-2+\frac{1}{2}=1$$

ESERCIZIO

Calcolare l'integrale di $F(x,y)=\frac{1}{x^2y^2}$ su $D=\{(x,y)|1\leq x\leq 2\,;\,y\geq 1\,;\,y\leq x\}$

$\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy=?$



$D=\{(x,y)|1\leq x\leq 2\,;\,1\leq y\leq x\}$

$$\int\int_D \frac{1}{x^2y^2}\,dx\,dy=\int_1^2\left(\int_1^x\frac{1}{x^2y^2}\,dy\right)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{-2+1}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot y^{-1}\Big|_1^x\right)dx=\int_1^2-\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}-1\right)dx=$$

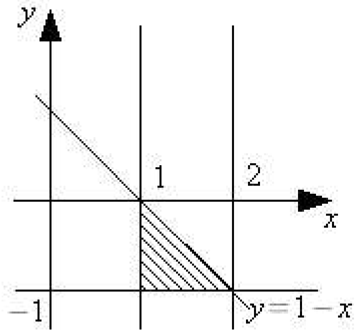
$$=\int_1^2-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}\Big|_1^2+\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1}\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{8}$$

ESEMPIO

$D=\{(x,y)|1\leq x\leq 2;1-x\geq y\geq -1\}$

$F(x,y)=\sin(y^2)$

$\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy$



$y=1-x \quad \Rightarrow \quad x=1-y$

$\int_1^2 \int_{-1}^{1-x} \sin(y^2)\,dy\,dx$ non si può calcolare

Consideriamo il dominio come x-semplice

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{1}^{1-y}\sin(y^2)\,dx\right)dy=\int_{-1}^{0}\sin(y^2)\,x\Big|_{1}^{1-y}=\int_{-1}^{0}\sin(y^2)(1-y)-\sin(y^2)\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{0}\sin(y^2)-y\sin(y^2)-\sin(y^2)\,dy=-\int_{-1}^{0}y\sin(y^2)\,dy=-\int_{-1}^{0}y\sin(y^2)\,dy=(*)$$

$t=y^2 \qquad \frac{dt}{dy}=2y \qquad dt=2y\,dy$

$$(*)=-\int_{y=-1}^{y=0}\sin(t)\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\cos(t)\Big|_{y=-1}^{y=0}=\frac{1}{2}\cos(y^2)\Big|_{y=-1}^{y=0}=\frac{1}{2}\cos(0)-\frac{1}{2}\cos(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(1)$$

---o---

CAMBIO DI VARIABILI

In una variabile se $x(t)$ è invertibile e derivabile in $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a'}^{b'} f(x(t))\cdot x'(t)\,dt$$

Un cambio di variabili in due variabili è dato da due funzioni: $x=x(u,v) \quad y=y(u,v)$

- Supponiamo che x,y siano definite su un dominio regolare D'
- Sia $(x(u,v),y(u,v))\in D$ con D dominio regolare
- Supponiamo che $\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v}$ esistano e siano continue nell'interno di D' .

Consideriamo la funzione $T:D'\rightarrow D$ definita da $T(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$.

Assumiamo che T sia invertibile e sia J la matrice: $J=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

Questa è detta matrice **jacobiana** di T e si indica con $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

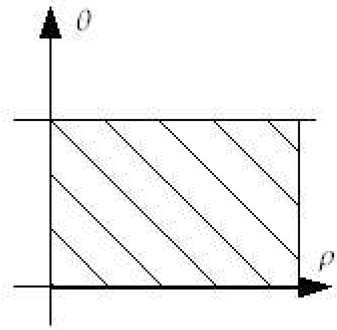
Si dice che T è regolare se $det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\neq 0$ in ogni punto interno di D' .

Se $T:D'\rightarrow D$ è regolare, allora se F è una funzione continua definita su D

$$\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy=\int\int_D F(x(u,v),y(u,v))\cdot\left|det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right|du\,dv \quad .$$

COORDINATE POLARI

Sia $S=\{(\rho,\theta)|\rho>0;\theta\in[0,2\pi]\}$



$x(\rho,\theta)=\rho\cos\theta \qquad y(\rho,\theta)=\rho\sin\theta$

$T:S\rightarrow\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$T(\rho,\theta)=(x(\rho,\theta),y(\rho,\theta))$ è una trasformazione regolare

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}=\rho\cos^2\theta+\rho\sin^2\theta=\rho>0$$

Sia F una funzione definita su un dominio regolare D

$D'=\{(\rho,\theta)|(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\in D\}$

$T:D'\rightarrow D$ è una trasformazione regolare quindi:

$\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy=\int\int_{D'} F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$ con ρ dato da $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$

ESEMPIO:
Calcolare l'area del cerchio di raggio R e centro in O.

$$C=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$$

$$Area\ (C)=\int\int_C dx\,dy \qquad \left(Se\ \ D\subseteq \mathbb{R}^2\ \ area(D)=\int\int_D dx\,dy\right)$$

Si passa a coordinate polari: $C'=\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le R;0\le\theta\le 2\pi\}$

$$\int\int_C dx\,dy=\int\int_{C'}\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\rho\,d\rho=\int_0^R 2\pi\rho\,d\rho=2\pi\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^R=\pi R^2$$

ESEMPIO:
Calcolare il volume di una sfera di raggio R e centro l'origine $(0,0,0)$.

$$S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2\}$$

$C^+=\{(x,y,z)|z\ge 0\}$ dove C^+ è la calotta superiore

Si calcola il volume di C^+ (calotta superiore) e quindi il volume (S) = 2 volume (C^+)

$C^+=\{(x,y,z)|x^2+y^2\le R^2\ \ e\ \ 0\le z\le\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\}$ poiché $x^2+y^2+z^2\le R^2$

$$Volume\ (C^+)=\int\int_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Trasformo il dominio in coordinate polare:

$$D=\{x^2+y^2\le R^2\}\quad\rightarrow\quad D'=\{(\rho,\theta)|\rho^2\le R^2;0\le\theta\le 2\pi\}=\{(\rho,\theta)|0<\rho\le R;0\le\theta\le 2\pi\}$$

$$\int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\theta\right)\rho\,d\rho=\int_0^R 2\pi\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho=(*)$$

pongo $t=R^2-\rho^2\ \Rightarrow\ \dfrac{dt}{d\rho}=-2\rho\ \Rightarrow\ dt=-2\rho\,d\rho$

$$(*)=\int_{\rho=0}^{\rho=R}\cancel{2}\pi\sqrt{t}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)dt=-\pi\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\sqrt{t}^{1+\frac{1}{2}}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R}=-\pi\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R}=-\pi\frac{2}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R=\pi\frac{2}{3}R^3$$

$$volume\ (S)=\frac{4}{3}\pi R^3$$