EQUAZIONE LOGISTICA (II)

Se $\frac{y}{1-by}>0$ $\qquad$ $\left|\frac{y}{1-by}\right|=\frac{y}{1-by}$

$$\frac{y}{1-by}=K\,\mathrm{e}^{a\,x}$$

$$y=K\,\mathrm{e}^{a\,x}(1-by)$$

$$y=K\,\mathrm{e}^{a\,x}-b\,K\,\mathrm{e}^{a\,x}\,y$$

$$y(1+b\,K\,\mathrm{e}^{a\,x})=K\,\mathrm{e}^{a\,x}$$

$$y=\frac{K\,\mathrm{e}^{a\,x}}{1+b\,K\,\mathrm{e}^{a\,x}}$$

Se $\frac{y}{1-by}<0$ $\qquad$ $\left|\frac{y}{1-by}\right|=-\frac{y}{1-by}$

$$\frac{y}{1-by}=-K\,\mathrm{e}^{a\,x}$$

$$y=-K\,\mathrm{e}^{a\,x}(1-by)$$

$$y=-K\,\mathrm{e}^{a\,x}+K\,b\,y\,\mathrm{e}^{a\,x}$$

$$y(1-K\,b\,\mathrm{e}^{a\,x})=-K\,\mathrm{e}^{a\,x}$$

$$y=\frac{-K\,\mathrm{e}^{a\,x}}{1-K\,b\,\mathrm{e}^{a\,x}}$$

La soluzione dell'equazione logistica è:

$$y=\frac{C_1\mathrm{e}^{a\,x}}{1+C_1b\,\mathrm{e}^{a\,x}} \qquad C_1\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{C_1\mathrm{e}^{a\,x}}{1+C_1b\,\mathrm{e}^{a\,x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{C_1\cancel{\mathrm{e}^{a\,x}}}{\cancel{\mathrm{e}^{a\,x}}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{a\,x}}+C_1b\right)}=\frac{\cancel{C_1}}{\cancel{C_1}b}=\frac{1}{b}$$

Se si ha il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^I = ay\left(1-\dfrac{y}{K}\right) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

$$y=\frac{C_1 \mathrm{e}^{ax}}{1+C_1\dfrac{1}{K}\mathrm{e}^{ax}} \qquad C_1=?$$

$$y_0=y(0)=\frac{C_1}{1+\dfrac{C_1}{K}} \quad \Rightarrow \quad y_0=\frac{C_1}{1+\dfrac{C_1}{K}}=\frac{K\,C_1}{K+C_1}$$

$$y_0(K+C_1)=K\,C_1$$

$$y_0 K+y_0 C_1=K\,C_1$$

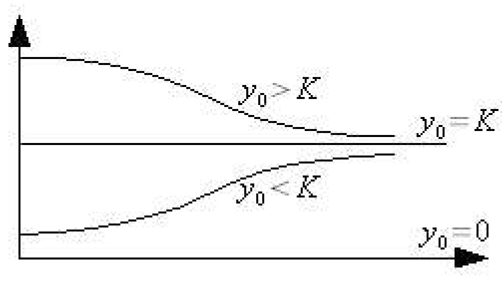
$$K\,C_1-y_0 C_1=y_0 K$$

$$C_1(K-y_0)=y_0 K$$

$$C_1=\frac{y_0 K}{K-y_0}$$

La soluzione è:

$$y=\frac{\left(\dfrac{y_0 K}{K-y_0}\right)\mathrm{e}^{ax}}{1+\dfrac{y_0 \cancel{K}}{K-y_0}\mathrm{e}^{ax}\cdot\dfrac{1}{\cancel{K}}}=\frac{y_0 K\,\mathrm{e}^{ax}}{K-y_0+y_0\,\mathrm{e}^{ax}}$$



$$\begin{cases} y^I = ay\left(1-\dfrac{y}{K}\right) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

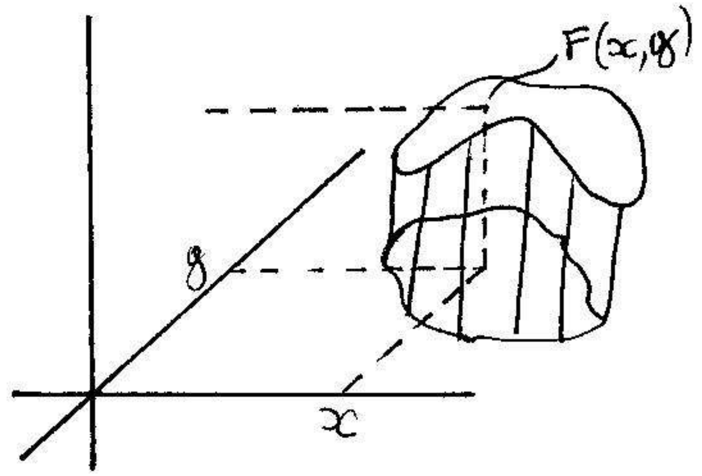
$a\,y\left(1-\dfrac{y}{K}\right)=0 \;\Leftrightarrow\; y=0 \quad y=K$ soluzione di equilibrio

INTEGRAZIONE

E' l'integrale di funzioni in due variabili ed esprime il volume sotteso al grafico

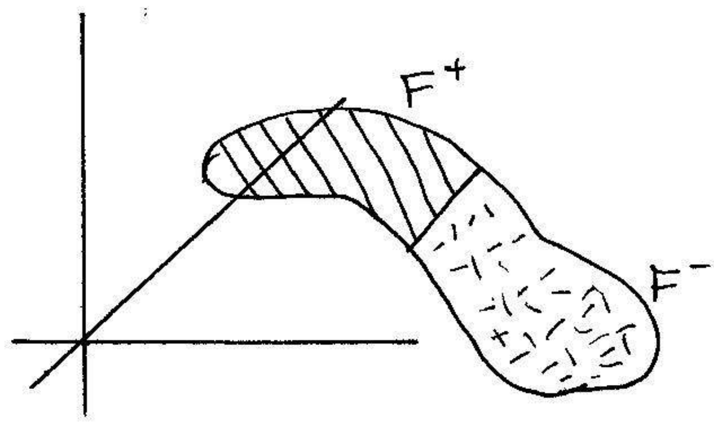
DEFINIZIONE DI INTEGRALE DOPPIO
Sia $F: D \to \mathbb{R}$ una funzione di due varibili $F(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in D$.
Sia Ω la regione di spazio che sta sotto il grafico di F

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq F(x, y)\}$$



Il volume di Ω si indica con $\int\int_D F(x, y) dx\, dy$ ed è detto integrale doppio della funzione F .

I° PROBLEMA:
Come definire $\int\int_D F(x, y) dx\, dy$ se $F(x, y)$ non è sempre positiva.



$$\int\int_D F(x, y) dx\, dy = \int\int F^+ - \int\int F^-$$

FORMALMENTE:

Si definisce

$$F^+(x,y)=\begin{cases} F(x,y) & se \quad F(x,y)\geq 0 \\ 0 & se \quad F(x,y)\leq 0 \end{cases}$$

$$F^-(x,y)=\begin{cases} -F(x,y) & se \quad F(x,y)\leq 0 \\ 0 & se \quad F(x,y)\geq 0 \end{cases}$$

DEFINIZIONE

Diremo che l'integrale $\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy$ esiste se almeno uno tra $\int\int_D F^+(x,y)\,dx\,dy$ e $\int\int_D F^-(x,y)\,dx\,dy$ è finito.

Diremo che F è integrabile se entrambi gli integrali sono finiti e in tal caso si definisce

$$\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy=\int\int_D F^+(x,y)\,dx\,dy-\int\int_D F^-(x,y)\,dx\,dy$$

Se $\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy$ esiste

e $\int\int_D F^+(x,y)\,dx\,dy=+\infty$

$\Rightarrow \quad \int\int_D F^-(x,y)\,dx\,dy$ è finito

Si definisce

$$\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy=+\infty$$

Se invece

$$\int\int_D F^-(x,y)\,dx\,dy=+\infty$$

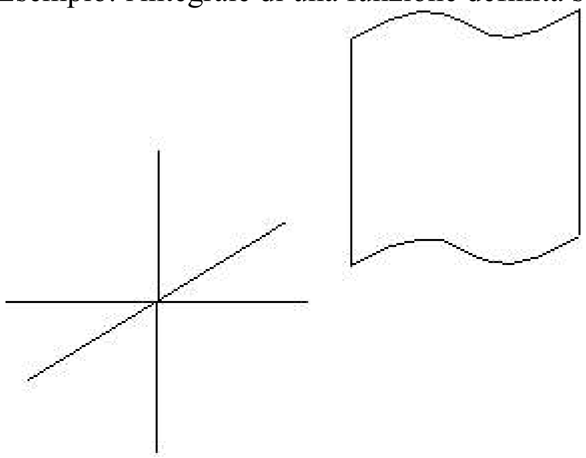
Allora si definisce

$$\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy=-\infty$$

PROPRIETÁ DELL'INTEGRALE DOPPIO

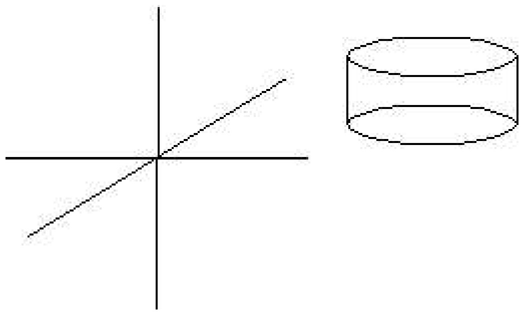
1) Se $F: D \to \mathbb{R}$ è una funzione e l'area di D è nulla allora $\int\int_D F(x, y)\,dx\,dy = 0$

Esempio: l'integrale di una funzione definita su una curva



$$\int\int_D 0 \cdot dx\,dy = 0$$

2) $\int\int_D dx\,dy$ = area di D



$\int\int_D 1\,dx\,dy$ = volume del cilindro con area di base D e altezza 1.
Quindi
$\int\int_D dx\,dy$ = volume cilindro = area D per altezza =
= area D.

3) $F: D \to \mathbb{R}$ $G: D \to \mathbb{R}$ integrabili

Allora:

$$\int\int_D (F(x, y) + G(x, y))\,dx\,dy = \int\int_D F(x, y)\,dx\,dy + \int\int_D G(x, y)\,dx\,dy$$

Se $C \in \mathbb{R}$ $\int\int_D C\,F(x, y)\,dx\,dy = C \int\int_D F(x, y)\,dx\,dy$

4) Se esiste $\int\int_D F(x, y)\,dx\,dy$ allora $\int\int_D |F(x, y)|\,dx\,dy \geq \left|\int\int_D F(x, y)\,dx\,dy\right|$

DIMOSTRAZIONE:

$$|F(x, y)| = F^+(x, y) + F^-(x, y)$$

Quindi

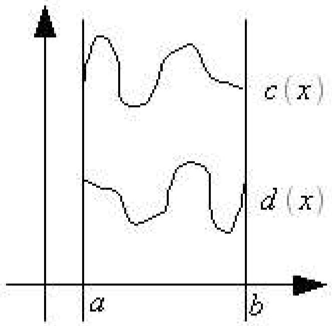
$$\int\int_D |F(x, y)|\,dx\,dy = \int\int_D F^+(x, y)\,dx\,dy + \int\int_D F^-(x, y)\,dx\,dy \geq$$

$$\geq \left|\int\int_D F^+(x, y)\,dx\,dy - \int\int_D F^-(x, y)\,dx\,dy\right| = \left|\int\int_D F(x, y)\,dx\,dy\right|$$

DOMINI REGOLARI

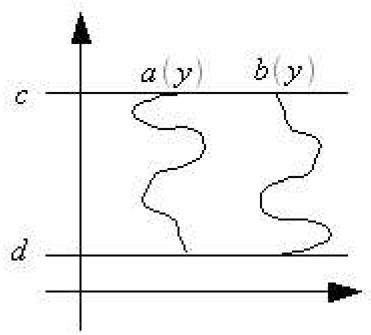
DEFINIZIONE DI DOMINIO Y-SEMPLICE

Un dominio D si dice y-semplice se è compreso tra due rette verticali $x=a$, $x=b$ con $a<b$ e tra i grafici di due funzioni continue $c:[a,b]\to\mathbb{R}$ $d:[a,b]\to\mathbb{R}$ con $c(x)\leq d(x)$

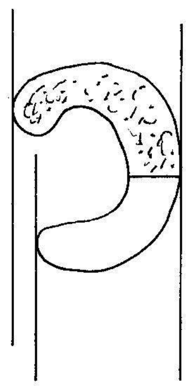


DEFINIZIONE DI DOMINIO X-SEMPLICE

Un dominio D si dice x-semplice se è compreso tra due rette orizzontali $y=c$, $y=d$ con $c>d$ e tra i grafici di due funzioni continue $a:[c,d]\to\mathbb{R}$ $b:[c,d]\to\mathbb{R}$ con $a(y)\leq b(y)$



Si dice semplice un dominio o x-semplice o y-semplice.
Si dice regolare un dominio che è unione finita di domini semplici non sovrapposti (cioè si intersecano al massimo sul bordo).



Non è x-semplice ne y-semplice ma è regolare. Se divise, entrambe le parti sono y-semplici

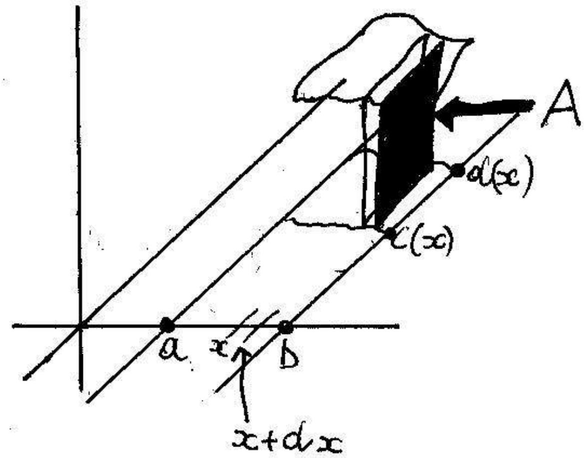
Un dominio D è y-semplice se $D=\{(x,y)|a\leq x\leq b;c(x)\leq y\leq d(x)\}$
Un dominio D è x-semplice se $D=\{(x,y)|c\leq y\leq d;a(y)\leq x\leq b(y)\}$

CRITERIO DI INTEGRABILITÀ
Se D è regolare e $F: D \to \mathbb{R}$ è limitata in D e continua nell'interno di D , allora F è integrabile, cioè esiste finito $\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy$
In particolare se F è continua in D è integrabile, perchè un dominio regolare è chiuso e limitato.

CALCOLO DEGLI INTEGRALI MEDIANTE ITERAZIONE
Per calcolare l'integrale su domini regolari, basta bsaperlo calcolare su domini semplici.
Perchè se $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$ con D_i semplici non sovrapposti, allora:

$$\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int\int_{D_i} F(x,y)\,dx\,dy$$

Come calcolare l'integrale su un dominio y-semplice:



VOLUME FETTA $= A\,dx$ $\quad\quad$ $\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b A\,dx$

ma $A = \int_{c(x)}^{d(x)} F(x,y)\,dy$ $\quad\quad$ $\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} F(x,y)\,dy \right) dx$

TEOREMA (DI FUBINI):
Sia D un dominio y-semplice
$D = \{(x,y) | a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)\}$
Se F è integrabile allora

$$\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} F(x,y)\,dy \right) dx$$

Se D è x-semplice
$D = \{(x,y) | c \le y \le d, a(y) \le x \le b(y)\}$
Allora

$$\int\int_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} F(x,y)\,dy \right) dx$$

TEOREMA DI TONELLI:
Se $F(x,y) \ge 0$ per ogni $(x,y) \in D$ allora vale il teorema di Fubini anche se F non è integrabile.