EQUAZIONI NON OMOGENEE

$(*) \qquad a_2(x)y^{II}+a_1(x)y^I+a_0(x)y=f(x)$

$(**) \qquad a_2(x)y^{II}+a_1(x)y^I+a_0(x)y=0$

$y=A\,y_1+B\,y_2$

dove $A,B\in\mathbb{R}$ e y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea linearmente indipendenti.
Come calcolare l'integrale di $(*)$ sapendo l'integrale generale di $(**)$?

Se y_P è una soluzione particolare di $(*)$ allora, l'integrale generale è dato da $y_P+A\,y_1+B\,y_2$ con $A,B\in\mathbb{R}$.

$\tilde{y}$ sia soluzione dell'equazione non omogenea.

Sia $y=\tilde{y}-y_P \quad \Rightarrow \quad y^I=\tilde{y}^I-y_P^I$ e $y^{II}=\tilde{y}^{II}-y_P^{II}$

$$a_2(x)(\tilde{y}^{II}-y_P^{II})+a_1(x)(\tilde{y}^I-y_P^I)+a_0(x)(\tilde{y}-y_P)=$$
$$=a_2(x)\tilde{y}^{II}+a_1(x)\tilde{y}^I+a_0(x)\tilde{y}-(a_2(x)y_P^{II}+a_1(x)y_P^I+a_0(x)y_P)=$$
$$=f(x)-f(x)=0$$

cioè $\tilde{y}-y_P$ è una soluzione dell'equazione omogenea.

$\tilde{y}-y_P=A\,y_1+B\,y_2$ quindi $\tilde{y}=y_P+A\,y_1+B\,y_2$

ESEMPIO:

$y^{II}+y^I=x^2$

$y^{II}+y^I=0 \qquad k^2+k=0 \qquad k(k+1)=0 \qquad k=0 \qquad k+1=0$

$k=0$ e $k=-1$

Integreale generale dell'equazione omogenea è: $y=A\,e^{0x}+B\,e^{-1x}=A+B\,e^{-x}$

$y_P=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x$ è una soluzione dell'equazione non omogenea.

L'integrale generale dell'equazione non omogenea è:

$y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+A+B\,e^{-x}$ al variare di $A,B\in\mathbb{R}$

Se si ha un problema a valori iniziali:

$$\begin{cases} y^{II}+y^I=x^2 \\ y(0)=1 \\ y^I(0)=-1 \end{cases}$$

$y(0)=1=A+B$

$y^I=x^2-2x+2-B\,e^{-x}$

$y^I(0)=-1=2-B$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2-B=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \end{cases}$$

La soluzione del problema a valori iniziali è: $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-2+3\,e^{-x}$

METODO DEI COEFFICIENTI INDETERMINATI (come calcolare soluzioni particolari)

$y^{II}+y^{I}+y=x$

$y_P=A+Bx$

$y_P^I=B \qquad y_P^{II}=0$

$0+B+A+Bx=x$

$\begin{cases} B=1 \\ A+B=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=1 \\ A=-1 \end{cases}$

quindi $y_P=-1+x$ è una soluzione particolare

ECCEZIONI:

$y^{II}+y^{I}=x^2$

$y_P=A+Bx+Cx^2 \quad \Rightarrow \quad y_P^I=B+2Cx$ e $y_P^{II}=2C$

$2C+B+2Cx=x^2$ non si puó risolvere perchè ci sono termini che soddisfano l'equazione omogenea. In questo caso si moltiplica tutto per x

$y_P=x(A+Bx+Cx^2) \quad \Rightarrow \quad y_P^I=A+2Bx+3Cx^2$ e $y_P^{II}=2B+6Cx$

$2B+6Cx+A+2Bx+3Cx^2=x^2$

$$\begin{cases} 3C=1 \\ 6C+2B=0 \\ 2B+A=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=\frac{1}{3} \\ B=-1 \\ A=2 \end{cases}$$

$y_P=x(2-x+\frac{1}{3}x^2)$

REGOLA GENERALE

Data l'equazione

$y^{II}+a\,y^{I}+b\,y=f(x) \qquad A,B\in\mathbb{R}$

Se $f(x)$ è un polinomio, si sceglie come y_P un polinomio generico dello stesso grado di $f(x)$. Se in questo polinomio ci sono termini che soddisfano l'equazione omogenea allora si moltiplica tutto per x . Se ci sono ancora termini che sono soluzioni dell'equazione omogenea, allora si moltiplica nuovamente tutto per x . (N.B. Mai piú di due volte!!!)

Se $f(x)=P(x)e^{rx}$ con $P(x)$ polinomio, allora si prende come y_P una funzione del tipo $A(x)e^{rx}$ dove $A(x)$ è polinomio dello stesso grado di $P(x)$.
Per togliere i termini che sono soluzioni dell'equazione omogenea, si usa la stessa regola che si usa per i polinomi.

Se $f(x)=P(x)e^{rx}\cos(kx)$ oppure $f(x)=P(x)e^{rx}\sin(kx)$, con $P(x)$ polinomio $y_P=A\,x\,e^{rx}\cos(kx)+B\,x\,e^{rx}\sin(kx)$ con $A(x),\ B(x)$ polinomi dello stesso grado di $P(x)$.
Si usa la stessa regola per eliminare i termini che sono soluzioni dell'equazione omogenea.

ESEMPIO:

$y^{II}-y^{I}=x+e^x$

Se y_P è soluzione di $y^{II}-y^{I}=x$

Se z_P è soluzione di $y^{II}-y^{I}=e^x$

allora y_P+z_P è soluzione di $y^{II}-y^{I}=x+e^x$

$y^{II}-y^{I}=x$

$y_P=A+Bx$ non va bene perché il termine noto è soluzione dell'equazione omogenea

$y_P=Ax+Bx^2 \quad \Rightarrow \quad y_P^I=A+2Bx$ e $y_P^{II}=2B$

$2B-A-2Bx=x$

$$\begin{cases} -2B=1 \\ 2B-A=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=-\frac{1}{2} \\ A=-1 \end{cases}$$

$y_P=-x-\frac{1}{2}x^2$

$y^{II}-y^{I}=e^x$

$z_p=Ae^x \quad \Rightarrow \quad z_p^I=Ae^x$ e $z_p^{II}=Ae^x$ ma allora $z_p^{II}-z_p^I=0$

$z_p=Axe^x \quad \Rightarrow \quad z_p^I=Ae^x+Axe^x$ e $z_p^{II}=Ae^x+Ae^x+Axe^x=2Ae^x+Axe^x$

$2Ae^x+\cancel{Axe^x}-Ae^x-\cancel{Axe^x}=e^x$

$Ae^x=e^x$

$A=1$

$z_p=xe^x$

La soluzione cercata è: $-x-\frac{1}{2}x^2+xe^x$

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Un'equazione al I° ordine $y^I=f(x,y)$ si dice a variabili separabili se $f(x,y)=g(x)h(y)$

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^I=g(x)h(y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

Se $f(x,y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ sono continue, allora esiste un'unica soluzione definita in un intorno di x_0 .

Se $g(x)$ e $h^I(x)$ sono continue, allora esiste un'unica soluzione definita in un intorno di x_0 .

Supponiamo che $h(y_0)=0$

$$\begin{cases} y^I=g(x)h(y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

La soluzione è $y=y_0$ infatti $0=g(x)\cdot h(y_0)$.

Supponiamo $h(y_0) \neq 0$ in un intorno di y_0 ($h(y)$ sia continua).

$$y^I = g(x) h(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{y^I}{h(y)} = g(x)$$

Siano $H(Y)$ e $G(X)$ primitive di $\frac{1}{h(y)}$ e di $g(x)$.

$$\frac{d}{dx}(H(Y)) = \frac{1}{h(y)} y^I = g(x) = G^I(X)$$

$$H(Y) = G(X) + c \quad .$$

Questa equazione dà impliciamente tutte le soluzioni dell'equazione.
Imponendo la condizione iniziale si trova la costante c .
Se si riesce a esplicitare y dall'equazione, si è calcolata la soluzioni dell'equazione.

ESEMPIO:

$$y^I = x \cdot e^y \qquad y^I = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot e^y \qquad \frac{dy}{e^y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int x\,dx \qquad \int e^{-y}\,dy = \int x\,dx$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad e^{-y} = -\frac{1}{2}x^2 - c$$

$$-y = \ln\left(-\frac{1}{2}x^2 - c\right) \qquad y = -\ln\left(-\frac{1}{2}x^2 - c\right)$$

Se il problema è a valori iniziali:

$$\begin{cases} y^I = x \cdot e^y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$-e^{-1} = \frac{1}{2} \cdot 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = -e^{-1}$$

La soluzione è: $y = -\ln\left(-\frac{1}{2}x^2 + e^{-1}\right)$

Definita solo se: $\frac{1}{2}x^2 < e^{-1}$

ESEMPIO:

$y^I = a\,y(1-by) \qquad a\,,b>0$ equazione logistica.

$a\,y(1-by)=0$ se e solo se $y=0$ o $1-by=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{b}$

Se il problema è:

$$\begin{cases} y^I = a\,y(1-by) \\ y(x_0)=0 \end{cases}$$

La soluzione è: $y=0$

Se il problema è:

$$\begin{cases} y^I = a\,y(1-by) \\ y(x_0)=\frac{1}{b} \end{cases}$$

La soluzione è: $y=\frac{1}{b}$

Se il problema è:

$$\begin{cases} y^I = a\,y(1-by) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

con $y_0 \neq 0, \frac{1}{b}$

Si ha, risolvendo:

$$\frac{y^I}{y(1-by)}=a \qquad y^I=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{y(1-by)}=a\,dx \qquad \int \frac{dy}{y(1-by)}=\int a\,dx$$

$$\int a\,dx=ax+c$$

$$\frac{A}{y}+\frac{B}{1-by}=\frac{A(1-by)+By}{y(1-by)}=\frac{1}{y(1-by)}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ -bA+B=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=b \end{cases}$$

$$\frac{1}{y(1-by)}=\frac{1}{y}+\frac{b}{1-by}$$

$$\int \frac{dy}{y}+\int \frac{b}{1-by}\,dy=\ln|y|-\ln|1-by|=\ln\left|\frac{y}{1-by}\right|$$

$$\ln\left|\frac{y}{1-by}\right|=ax+c$$

$$\left|\frac{y}{1-by}\right|=K\,e^{ax} \quad K>0 \text{ con } K=e^c>0 \text{ sempre!}$$